Lösningar till utvalda uppgifter i kapitel 3

3.37 (a) Att '$\leq$' är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv följer direkt av att 'den vanliga' $\leq$ är det på $\mathbb{N}$ och $\mathbb{Z}$.

(b) Följden $m_n = (-n, -n)$ där $n = 0, 1, 2, \ldots$ är ett exempel på en strängt avtagande följd i $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ som är oändlig och därmed är '$\leq$' inte välgrundad på $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(c) Antag att vi har en strängt avtagande följd i $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ med första element (a, b). Då kan denna innehålla högst $a + b + 1$ par, ty någon av de båda koordinaterna måste minska i varje steg i följden per definition av '$\leq$' och den första kan minska högst a gånger och den andra högst b gånger. Alltså är varje strängt avtagande följd ändlig och därmed är '$\leq$' välgrundad på $\mathbb{N}$.

3.29 (a) Relationen $\mathcal{R}_1$ är reflexiv, ty $f(x) \leq f(x)$ för alla naturliga tal x och alla $f \in M$.

Relationen $\mathcal{R}_1$ är antisymmetrisk, ty om $f(x) \leq g(x)$ och $g(x) \leq f(x)$ för alla naturliga tal x så är $f = g$.

Relationen $\mathcal{R}_1$ är transitiv, ty om $f(x) \leq g(x)$ och $g(x) \leq h(x)$ för alla naturliga tal så är uppenbarligen $f(x) \leq h(x)$ för alla naturliga tal x.

Därmed har vi visat att $\mathcal{R}_1$ är en partiell ordning.

Ingen av de två andra relationerna är antisymmetriska (och inte heller transitiva) och därmed inga partiella ordningar. Om vi t.ex. väljer $f(x) = 0$ och $g(x) = x$ så gäller det att $f\mathcal{R}_2 g$, $g\mathcal{R}_2 f$ och $f\mathcal{R}_3 g$, $g\mathcal{R}_3 f$ eftersom $f(0) = g(0)$ och $\sum_{i=0}^{0} f(i) = \sum_{i=0}^{0} g(i)$.

(b) Minimalt och minsta element är $f(x) = 0$. Största och maximala element saknas eftersom $\mathbb{N}$ saknar sådana element.

3.32 (a) Tag $(a, b) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$. Per definition är detta ekvivalent med att det finns $c \in M$ sådant att $a\mathcal{R}c$ och $c\mathcal{R}^{-1}b$. Det ger per definition av $\mathcal{R}^{-1}$ att $c\mathcal{R}^{-1}a$ och $b\mathcal{R}c$ och alltså $(b, a) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$ vilket visar att $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$ är symmetrisk.

(b) Vi har

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}\circ\mathcal{R}^{-1} \text{ reflexiv } &\iff \forall a \in M\ a(\mathcal{R}\circ\mathcal{R}^{-1})a \\
&\iff \forall a \in M\ \exists c \in M\ (a\mathcal{R}c \wedge c\mathcal{R}^{-1}a) \\
&\iff \forall a \in M\ \exists c \in M\ a\mathcal{R}c.
\end{aligned}$$

Alltså uttryckt i ord så måste alla element i M vara relaterat till åtminstone ett element.

3.37 (a) Tag t.ex. $A = C = \{0\}$ och $B = \{0, 1\}$ och $f(x) = g(x) = 0$ för alla x i respektive definitionsmängd.

(b) Antag att $g \circ f$ är bijektiv. Tag $x, y \in A$ med $f(x) = f(y)$. För att visa att f är injektiv så ska vi visa att i så fall är $x = y$. Men $g \circ f(x) = g \circ f(y)$ och eftersom $g \circ f$ är bijektiv och speciellt injektiv så följer det att $x = y$ och alltså är f injektiv.

Antag återigen att $g \circ f$ är bijektiv. För att visa att g är surjektiv så ska vi visa att $g(B) = C$. Men $g \circ f$ är bijektiv och speciellt surjektiv så $g \circ f(A) = C$. Men $f(A) \subseteq B$ så vi får $C = g(f(A)) \subseteq g(B)$ och alltså är $g(B) = C$ och därmed är g surjektiv.

3.37 (a) För negativa x avtar funtionen ifrån oändligheten mot 2 eftersom $-3x$ är strängt avtagande. Funktionen fortsätter avta för positiva x med start vid 2 eftersom $-x^2$ är strängt avtagande för positiva x och går mot minus oändligheten då x går mot oändligheten. Alltså antar funktionen alla reella tal precis en gång.

(b) Sätt $y = g(x)$. Då är $x = g^{-1}(y)$. För $x < 0$ är $y > 2$ och då har vi $y = 2 - 3x$ så $x = (2 - y)/3$. Alltså är

$$g^{-1}(y) = \frac{2-y}{3}, \text{ för } y > 2.$$

För $x \geq 0$ är $y \leq 2$ och då har vi $y = 2 - x^2$ så $x = \sqrt{2-y}$. Alltså är

$$g^{-1}(y) = \sqrt{2-y}, \text{ för } y \leq 2.$$

Sammantaget får vi alltså

$$g^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{2-y}{3} & \text{för } y > 2, \\ \sqrt{2-y} & \text{för } y \leq 2. \end{cases}$$

3.38 (a) En av grundtankarna med personnumret är ju att varje person ska få ett unikt nummer, med andra ord att denna funktion är injektiv. Den är inte surjektiv eftersom det finns många fler 12-siffriga tal än det finns människor på jorden och speciellt börjar alla personnummmer med en etta eller tvåa.

(b) Inte heller denna är surjektiv eftersom första siffran i $g(x)$ kommer alltid att vara en etta eller tvåa. Det största möjliga tal man kan få från funktionen idag är garanterat mindre än 20100828 och det minsta är garanterat större än $18950000 - 9999 = 18940001$. Alltså är antalet möjliga värden högst $20100828 - 18940000 = 1160828$ vilket är mindre än antalet personer med svenskt personnummer. Alltså är funktionen inte injektiv.

3.39 (a) Funktionen är inte injektiv eftersom $\varphi(p,q) = \varphi(q,p)$ per definition.

(b) Funktionen är inte surjektiv eftersom vi bara får polynom med reella nollställen så att t.ex. $(0,1)$ som svarar mot x^2+1 träffas inte av φ.

(c) Polynomet som har p och q som nollställen är

$$(x-p)(x-q) = x^2 - (p+q)x + pq$$

så $\varphi(p,q) = (-(p+q), pq)$. Vi får alltså ekvationssystemet

$$\begin{aligned} p &= -p - q \\ q &= pq. \end{aligned}$$

Om $q \neq 0$ så ger den andra ekvationen $p = 1$ vilket ger $q = -2p = -2$ enligt den första. Andra möjligheten är $q = 0$ vilket ger $p = 0$. Vi har alltså två lösningspar: $(0,0)$ och $(1,-2)$

3.12 (a) Den är injektiv, ty de tre elementen i definitionsmängden avbildas på tre olika element. Den är inte surjektiv, ty inget element avbildas på 4 som finns i målmängden.

(b) Den är inte injektiv, ty $g(3) = g(4)$. Den är surjektiv, ty alla de tre elementen i målmängden finns i värdemängden.

(c) Vi har att

$$f \circ g : B \longrightarrow B,\ f \circ g(1) = 1,\ f \circ g(2) = 2,\ f \circ g(3) = f \circ g(4) = 3,$$

samt

$$g \circ f : A \longrightarrow A,\ g \circ f(x) = x \text{ för alla } x.$$

(d) Vi ser ifrån svaret på förra deluppgiften att $g \circ f$ är identitetsfunktionen på A och därmed är den både injektiv och surjektiv. För $f \circ g$ får vi att den inte är surjektiv (ty 4 finns i målmängden men inte i värdemämgden) och inte heller injektiv (ty $f \circ g(3) = f \circ g(4)$).

3.42 Vi definierar $f, g \in M$ genom

$$\begin{cases} f(0) &= 1, \\ f(1) &= 0, \\ f(x) &= x, \text{ då } x > 1, \end{cases} \qquad \text{och} \qquad \begin{cases} g(0) &= 2, \\ g(1) &= 0, \\ g(2) &= 1, \\ g(x) &= x, \text{ då } x > 2. \end{cases}$$

Vi får då att

$$\begin{aligned} f \star g(0) &= f(g(f^{-1}(g^{-1}(0)))) \\ &= f(g(f^{-1}(1))) = f(g(0)) = f(2) = 2 \end{aligned}$$

och att

$$\begin{aligned} g \star f(0) &= g(f(g^{-1}(f^{-1}(0)))) \\ &= g(f(g^{-1}(1))) = g(f(2)) = g(2) = 1. \end{aligned}$$

Alltså är $f \star g \neq g \star f$ och därmed är $\star$ inte kommutativ.

3.43 (a) Ja, den är kommutativ ty

$$\begin{aligned}(c+dx)\star(a+bx) &= (ca-db)+(da+cb)x\\ &= (ac-bd)+(ad+bc)x = (a+bx)\star(c+dx)\end{aligned}$$

eftersom multiplikation av tal är kommutativ.

(b) Ja, den är associativ ty

$$\begin{aligned}((a+bx)\star(c+dx)) \quad \star &\quad (e+fx) = ((ac-bd)+(ad+bc)x)\star(e+fx)\\ = &\quad (ac-bd)e-(ad+bc)f+((ac-bd)f+(ad+bc)e)x\\ = &\quad (ace-bde-adf-bcf)+(acf-bdf+ade+bce)x\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}(a+bx)\star((c+dx) \quad \star &\quad (e+fx)) = (a+bx)\star((ce-df)+(cf+de)x)\\ = &\quad a(ce-df)-b(cf+de)+(a(cf+de)+b(ce-df))x\\ = &\quad (ace-bde-adf-bcf)+(acf-bdf+ade+bce)x\end{aligned}$$

där vi utnyttjar att multiplikation av tal är associativ och kommutativ.

(c) Ja, konstanta poynomet $1 = 1 + 0x$ är en identitet, ty

$$(1+0x)\star(a+bx) = 1\cdot a - 0\cdot b + (1\cdot b + 0\cdot x)x = a+bx$$

och vice versa eftersom den är kommutativ.

(d) Om man sätter $x^2 = -1$ så är operatorn helt enkelt multiplikation av poynom med denna extra regel, så i själva verket är det multiplikation av komplexa tal om man tänker sig att $a + bx$ betyder $a + bi$.

3.45 (a) Alla element i $[(1,0)] = \{(x,0) : x \neq 0\}$ och i $[(0,0)] = \{(0,0)\}$ ger värdet 0. Alla andra ekvivalensklasser innehåller bara element (x,y) med $y \neq 0$. Tag två godtyckliga element (x,y) och (cx,cy) ur samma ekvivalensklass $(c, y \neq 0)$. Eftersom $\frac{x}{y} = \frac{cx}{cy}$ så ger f samma värde för de båda elementen i $[(x,y)]$ och alltså beror inte värdet av f på vilken representant man väljer.

(b) T.ex. är $(1,1)$ och $(2,2)$ i samma ekvivalensklass, men g ger värdena 1 respektive 4.

(c) Den är inte injektiv, ty $[(0,0)] \neq [(1,0)]$ men $f([(0,0)]) = f([(1,0)])$.

(d) Den är surjektiv, ty givet $r \in \mathbb{R}$ så är $f([(r,1)]) = r$.

3.47 Vi ska visa att $\mathcal{R}$ är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv.

Reflexiv: Låt a vara ett godtyckligt element i M. Vi har $0 \in P$ enligt första villkoret och $a = a \star 0$ så $(a,a) \in \mathcal{R}$. Alltså är $\mathcal{R}$ reflexiv.

Antisymmetrisk: Låt a och b vara godtyckliga element i M. Antag att $(a,b),(b,a) \in \mathcal{R}$. Vi ska visa att i så fall är $a = b$. Från antagandet följer det att det finns $p_1, p_2 \in P$ sådana att

$$a = b \star p_1 \text{ och } b = a \star p_2.$$

Vi får då (genom att utnyttja associativiteten)

$$b = a \star p_2 = (b \star p_1) \star p_2 = b \star (p_1 \star p_2).$$

Genom att "addera" $-b$ från vänster på båda sidor och utnyttja $0 \star x = x$ så får vi $0 = p_1 \star p_2$ och därmed att $p_1 = -p_2$. Vi har alltså att $p_2 \in P$ och $-p_2 = p_1 \in P$ och enligt tredje villkoret är därmed $p_2 = 0$. Alltså är

$$b = a \star p_2 = a \star 0 = a$$

och vi har därmed visat att $\mathcal{R}$ är antisymmetrisk.

Transitiv: Låt a, b och c vara godtyckliga element i M. Antag att $(a,b),(b,c) \in \mathcal{R}$ och visa att i så fall $(a,c) \in \mathcal{R}$. Från vårt antagande följer det att det finns $p_1, p_2 \in P$ sådana att

$$a = b \star p_1 \text{ och } b = c \star p_2.$$

Vi får (genom att återigen utnyttja associativiteten)

$$a = b \star p_1 = (c \star p_2) \star p_1 = c \star (p_2 \star p_1).$$

Men $p_2 \star p_1 \in \mathcal{R}$ enligt det andra villkoret och därmed har vi att $(a, c) \in \mathcal{R}$. Alltså är $\mathcal{R}$ transitiv och därmed en partiell ordning.

3.48 (a) Tag t.ex. $\mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$. Då gäller att $\mathcal{R}^2 = \{(1, 3)\}$ och $\mathcal{R}^3 = \emptyset$

(b) Relationen $\mathcal{R}$ kan inte innehålla något element av typen (a, a), ty i så fall kommer detta att ingå i varje potens. (Man kan köra hur många varv som helst i en loop.)

Om den innehåller ett par av par av typen (a, b) och (b, a) så kommer $\mathcal{R}^2$ att innehålla (a, a) och (b, b). Därmed kommer sedan $\mathcal{R}^3$ återigen att innehålla (a, b) och (b, a). Induktivt får vi att $\mathcal{R}^{2n+1}$ innehåller (a, b) och (b, a) och $\mathcal{R}^{2n}$ innehåller (a, a) och (b, b) för alla naturliga tal n. Därmed kan $\mathcal{R}$ inte innehålla något sådant par av par.

Därmed kan den högst innehålla ett av varje möjligt par av olika element, dvs. högst 3 stycken. Men i förra uppgiften såg vi att det gick att hitta 3 stycken par så att det gäller så svaret är: 3.