Lösningar till utvalda uppgifter i kapitel 4

4.7 Vi visar först att $A_{2n} = 3 \cdot 2^n - 2$ med ett induktionsbevis.

Basfall: $n = 0$

Vi har att

$$3 \cdot 2^0 - 2 = 1 = A_0,$$

och alltså gäller likheten för $n = 0$.

Induktionssteget: Antag nu att det gäller för ett fixt jämnt naturligt tal $2n$. Visa att då gäller det också för $2(n+1)$. Vi får

$$A_{2n+2} = 2A_{2n+1} = 2(A_{2n} + 1) = 2(3 \cdot 2^n - 2 + 1) = 3 \cdot 2^{n+1} - 2,$$

och alltså gäller likheten också för $2(n+1)$.

Enligt induktionsprincipen gäller därmed likheten för alla jämna naturliga tal.

För de udda talen observerar vi bara att $A_{2n+1} = A_{2n} + 1 = 3 \cdot 2^{n+1} - 1$ enligt ovan.

4.8 Vi gör ett induktionsbevis.

Basfall: $n = 0$

Då gäller att

$$\sum_{i=1}^{0} F(2i-1) = 0 = F(2 \cdot 0),$$

och alltså gäller likheten för $n = 0$.

Induktionssteget: Antag nu att det gäller för ett fixt naturligt tal n. Visa att då gäller det också för $n+1$. Vi får

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} F(2i-1) &= \sum_{i=1}^{n} F(2i-1) + F(2(n+1)-1) \\ &= F(2n) + F(2n+1) = F(2n+2) = F(2(n+1))\end{aligned}$$

och alltså gäller likheten också för $n+1$.

Enligt induktionsprincipen gäller därmed likheten för alla naturliga tal.

4.9 Vi gör ett induktionsbevis.

Basfall: Vi får i fallet $n = 4$ att $2^4 = 16 < 24 = 4!$ så påståendet är sant för $n = 4$.

Induktionssteg: Antag att påståendet är sant för något n med $n \geq 4$. Vi ska visa att då är det också sant för $n+1$. Genom att utnyttja induktionsantagandet och att $(n+1) > 4 > 2$ så får vi

$$(n+1)! = (n+1)n! > (n+1)2^n > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1},$$

vilket är precis påståendet för $n+1$. Därmed följer det av induktionsprincipen att påståendet är sant för alla naturliga tal $n > 3$.

4.10 Sätt $f(n) = \prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right)$ och $g(n) = \frac{n+1}{2n}$. Då ska vi bevisa att $f(n) = g(n)$ för alla naturliga tal $n > 1$. Vi gör ett induktionsbevis.

Basfall: $n = 2$. Då har vi

$$f(2) = \prod_{i=2}^{2} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2 \cdot 2} = g(2),$$

så påståendet är sant för $n = 2$.

Induktionssteg: Antag att det är sant för n och visa att då är det också sant för $n+1$. Genom att utnyttja induktionsantagandet så får vi

$$\begin{aligned} f(n+1) &= \prod_{i=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= f(n) \cdot \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} = g(n) \cdot \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2} = \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2} \\ &= \frac{n(n+2)}{2n(n+1)} = \frac{n+2}{2(n+1)} = g(n+1). \end{aligned}$$

Enligt induktionsprincipen är påståendet därmed sant för alla heltal $n > 1$.

4.11 (a) Genom att utnyttja rekursionen så får vi

$$\begin{aligned} F_1(x) &= (x-1)+x^2 \\ F_2(x) &= (x^2+x-1)(x-1)+x^2 = x^3+x^2-2x+1 \\ F_3(x) &= (x^3+x^2-2x+1)(x-1)+x^2 = x^4-2x^2+3x-1 \end{aligned}$$

(b) Vi sätter $f(n) = F_n(0)$ och $g(n) = (-1)^n$ och ska alltså visa att $f(n) = g(n)$ för alla $n \in \mathbb{N}$. Vi gör ett induktionsbevis:
Basfall: $n = 0$. Vi har $f(0) = 1$ per definition och $g(0) = (-1)^0 = 1$ så det stämmer för $n = 0$.
Induktionssteg: Antag att $f(n) = g(n)$ för något fixt tal $n \geq 0$. Vi ska visa att i så fall är $f(n+1) = g(n+1)$.
Om vi utnyttjar rekursionen

$$f(n+1) = f(n)(0-1) + 0 = -f(n)$$

och induktionsantagandet så får vi

$$f(n+1) = -f(n) = -g(n) = -(-1)^n = (-1)^{n+1} = g(n+1).$$

Nu följer det av induktionsaxiomet att $f(n) = g(n)$ för alla naturliga tal n.

4.13 Basfall: $n = 0$. Vi har att båda leden är lika med 1. Alltså stämmer det för $n = 0$.

Induktionssteg: Antag att påståendet är sant för n. Vi ska visa att då är det också sant för $n+1$. Genom att använda induktionsantagandet så får vi

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} a^i &= \sum_{i=1}^{n} a^i + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1} \\ &= \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + \frac{a^{n+1}(a-1)}{a-1} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}, \end{aligned}$$

vilket är lika med högerledet för $n+1$.

Alltså är påståendet sant för $n+1$ om man antar att det är sant för n och därmed följer det av induktionsaxiomet att det är sant för alla naturliga tal n.

4.16 Vi gör ett induktionsbevis.

Basfall: $n = 1$

Då gäller att

$$VL = \sum_{k=1}^{1} k \cdot 2^{k-1} = 1 \cdot 2^0 = 1 \text{ och } HL = (1-1) \cdot 2^1 + 1 = 1,$$

och alltså gäller likheten för $n = 1$.

Induktionssteget: Antag nu att det gäller för ett fixt positivt heltal n. Visa att då gäller det också för $n+1$. Vi får

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k \cdot 2^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} + (n+1) \cdot 2^n = \\ &= (n-1) \cdot 2^n + 1 + (n+1) \cdot 2^n = 2n \cdot 2^n + 1 = \\ &= ((n+1)-1) \cdot 2^{n+1} + 1, \end{aligned}$$

och alltså gäller likheten också för $n+1$.

Enligt induktionsprincipen gäller därmed likheten för alla positiva heltal.

4.17 Vi gör ett induktionsbevis.

Basfall: Vi behöver två fall $n = 3$ och $n = 4$. Vi har

$$\begin{aligned} L(3) &= L(2) + L(1) = b + a \\ bF(3-1) + aF(3-2) &= b + a \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} L(4) &= L(3) + L(2) = (b+a) + b = 2b + a \\ bF(4-1) + aF(4-2) &= b \cdot 2 + a \cdot 1 = 2b + a \end{aligned}$$

så båda basfallen stämmer.

Induktionssteg: Antag att det är sant för alla k sådana att $k \leq n$ där $n \geq 4$ och visa att då är det också sant för $n+1$. Genom att utnyttja induktionsantagandet och rekursionen för Fibonacci-talen så får vi

$$\begin{aligned}
L(n+1) &= L(n) + L(n-1) \\
&= bF(n-1) + aF(n-2) + bF(n-1-1) + aF(n-1-2) \\
&= b(F(n-1) + F(n-2)) + a(F(n-2) + F(n-3)) \\
&= bF(n) + aF(n-1)
\end{aligned}$$

vilket var precis vad vi skulle visa.

Enligt induktionsprincipen är påståendet därmed sant för alla positiva heltal $n > 2$.

4.18 Vi gör ett induktionsbevis.

Basfall: $n = 0$. Vi har att båda leden är lika med 0. Alltså stämmer det för $n = 0$.

Induktionssteg: Antag att påståendet är sant för n. Vi ska visa att då är det också sant för $n+1$. Genom att använda induktionsantagandet så får vi

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i \cdot i! &= \sum_{i=1}^{n} i \cdot i! + (n+1)(n+1)! \\
&= ((n+1)! - 1) + (n+1)(n+1)! \\
&= (1 + n + 1)(n+1)! - 1 \\
&= (n+2)(n+1)! - 1 = (n+2)! - 1,
\end{aligned}$$

vilket är lika med högerledet för $n+1$.

Alltså är påståendet sant för $n+1$ om man antar att det är sant för n och därmed följer det av induktionsaxiomet att det är sant för alla naturliga tal n.

4.19 Definiera först

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \text{ och } g(n) = 2 - \frac{1}{n}.$$

Vi ska då visa att $f(n) < g(n)$, eller ekvivalent att $f(n) - g(n) < 0$, för alla heltal $n > 1$. Vi gör ett induktionsbevis.

Basfall: Om $n = 2$ så får vi

$$f(2) - g(2) = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k^2} - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{4} < 0.$$

Alltså stämmer det för $n = 2$.

Induktionssteg: Antag att $f(p) < g(p)$ för något $p > 1$. Visa att i så fall är $f(p+1) < g(p+1)$. Vi tittar på differensen och får om vi i andra steget utnyttjar induktionsantagandet att

$$\begin{aligned}
f(p+1) - g(p+1) &= \left(f(p) + \frac{1}{(p+1)^2}\right) - g(p+1) \\
&< g(p) + \frac{1}{(p+1)^2} - g(p+1) \\
&= \left(2 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{(p+1)^2} - \left(2 - \frac{1}{p+1}\right) \\
&= -\frac{1}{p} + \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{p+1} \\
&= \frac{-(p+1)^2 + p + p(p+1)}{p(p+1)^2} \\
&= \frac{-p^2 - 2p - 1 + p + p^2 + p}{p(p+1)^2} \\
&= \frac{-1}{p(p+1)^2} < 0.
\end{aligned}$$

Enligt indukionsprinipen gäller därmed, med stöd av basfall och induktionssteg, att $f(n) < g(n)$ för alla heltal $n > 1$.

4.20 Definiera först

$$f(n) = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \text{ och } g(n) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Vi ska då visa att $f(n) = g(n)$ för alla heltal $n \geq 1$. Vi gör ett induktionsbevis.

Basfall: Om $n = 1$ så får vi

$$f(1) = \sum_{k=1}^{2} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$g(1) = \sum_{k=2}^{2} \frac{1}{k} = \frac{1}{2}.$$

Alltså stämmer det för $n = 1$.

Induktionssteg: Antag att $f(p) = g(p)$ för något $p \geq 1$. Visa att i så fall är $f(p+1) = g(p+1)$. Vi startar med $f(p+1)$ och får om vi i fjärde steget utnyttjar induktionsantagandet att

$$\begin{aligned}
f(p+1) &= \sum_{k=1}^{2(p+1)} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2p} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p+2} \\
&= f(p) + \frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p+2} = g(p) + \frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p+2} \\
&= \sum_{k=p+1}^{2p} \frac{1}{k} + \frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p+2} \\
&= \sum_{k=(p+1)+1}^{2(p+1)} \frac{1}{k} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p+2} + \frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p+2} \\
&= g(p+1) + \frac{1}{p+1} - 2\frac{1}{2p+2} = g(p+1).
\end{aligned}$$

Enligt indukionsprinipen gäller därmed, med stöd av basfall och induktionssteg, att $f(n) = g(n)$ för alla heltal $n \geq 1$.