Lösningar till utvalda uppgifter i kapitel 6

6.10. (a) Om vi bortser från villkoret så finns det $\binom{14}{5}$ olika arbetsgrupper. Ifrån detta tal får vi sedan subtrahera det antal grupper som innehåller både Herr V och Fru M. En sådan grupp väljs ut genom att de övriga 3 medlemmarna väljs bland de återstående 12. Det finns alltså $\binom{12}{3}$ sådana grupper. Svaret är alltså

$$\binom{14}{5} - \binom{12}{3} = 1782.$$

(b) Samma resonemang som ovan ger

$$\binom{n}{k} - \binom{n-2}{k-2}.$$

6.11. Det finns 1 rad med 13 rätt. För 12 rätt finns det $\binom{13}{1} = 13$ olika matcher som kan missas och för var och en av dessa finns det 2 möjligheter. Det blir totalt $13 \cdot 2 = 26$ rader med 12 rätt. För 11 rätt finns det $\binom{13}{2} = 78$ olika par av matcher som kan missas och för var och en av dessa par finns det 4 möjligheter. Det blir totalt $78 \cdot 4 = 312$ rader med 11 rätt. För 10 rätt finns det $\binom{13}{3} = 286$ olika tripplar av matcher som kan missas och för var och en av dessa tripplar finns det 8 möjligheter. Det blir totalt $286 \cdot 8 = 2288$ rader med 10 rätt. Sammantaget får vi följande svar:

$$1 + 26 + 312 + 2288 = 2627.$$

(Chansen att få 9 rätt är alltså mer än 4 gånger så stor som att få in en vinst. Något man bör ha i åtanke när man förbannar sin otur efter ännu en vecka med retfulla 9 rätt.)

6.12. Vi har sex siffror givna så vi ska välja en siffra bland de återstående 7 så vi har 7 olika möjliga val av siffror. (Fallet där 0 är med är speciellt, men vi bortser först från det och återkommer till det i slutet.)

Antalet permutationer av 7 element med en dubblett och en triplett är $7!/2!3!$ så totala antalet blir $7 \cdot 7!/2!3!$. Men nu har vi också (felaktigt) räknat de som inleds med en nolla. Vi får dra bort dessa. Det handlar här om en permutation av 6 stycken med en dubblett och en triplett och alltså $6!/2!3!$ stycken. Sammantaget så får vi:

$$7\frac{7!}{2!3!} - \frac{6!}{2!3!} = 7^2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 - 5 \cdot 4 \cdot 3 = 48 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2880.$$

Nu till frågan hur många av dessa som är udda. Vi börjar med att räkna de som slutar på en etta. Vi bortser återigen först ifrån att första siffran inte får vara en nolla. Det finns $\binom{7}{2} = 21$ olika sätt att placera ut de två ettorna och 6 av dessa kommer att ha en etta sist. Alltså kommer $\frac{6}{21} = \frac{2}{7}$ av alla talen att sluta på en etta. Detta blir totalt $\frac{2}{7} \cdot 7 \cdot 7!/2!3! = 840$ stycken. Men nu måste vi subtrahera de med en nolla först (och en etta sist). Detta svarar mot en permutation av 5 siffror med en triplett, d. v. s. $5!/3! = 20$ stycken och vi får alltså 820 stycken som slutar med en etta.

Vi måste också göra en separat analys på de som slutar med en trea. Då har vi 7 alternativ för den icke specificerade siffran och sedan en permutation av 6 siffror med en dubblett och en triplett. Totalt blir det $7 \cdot 6!/3!2 = 420$ stycken. Men vi måste subtrahera de som börjar med en nolla vilket svarar mot en permutation av 5 siffror med en dubblett och en triplett, d. v. s. $5!/3!2 = 10$ stycken. Kvar är alltså 410 stycken.

För de övriga tre möjliga udda slutsiffrorna blir det samma antal och detta svarar mot en permutation av 6 siffror med en dubblett och en triplett, d. v. s. $6!/3!2! = 60$ stycken.

Totalt får vi alltså $820 + 410 + 3 \cdot 60 = 1410$ stycken udda tal.

6.13. (a) Man kan välja 11 bland 22 på $\binom{22}{11}$ sätt och 5 bland de återstående på $\binom{11}{5}$ sätt. Totalt får vi

$$\binom{22}{11} \cdot \binom{11}{5} = \frac{22!}{11!11!}\frac{11!}{6!5!} = \frac{22!}{11!5!6!}$$

(b) Vi räknar först ut på hur många sätt hon kan välja de som inte är målvakt. Det handlar om att först välja 10 bland 19 och sedan 4 bland de återstående 9. Hon kan sedan fördela de 3 målvakterna på $3! = 6$ sätt. Totalt blir det alltså

$$6 \cdot \binom{19}{10} \cdot \binom{9}{4}$$

olika lag. (Om man räknar ut det så blir det 69837768. Tufft att vara förbundskapten om man har ambitionen att fundera över alla möjligheter.)

6.14. Det kommer antingen att vara två pojkar och tre flickor eller tvärtom och dessa två möjligheter har förstås inga gemensamma utfall. Tre pojkar och två flickor kan väljas på

$$\binom{10}{2}\binom{8}{3} = 45 \cdot 56 = 2520$$

sätt och två pojkar och tre flickor kan väljas på

$$\binom{10}{3}\binom{8}{2} = 120 \cdot 28 = 3360$$

sätt så totalt blir det $2520 + 3360 = 5880$ olika möjligheter.

6.15. Vi startar med LEMURELL. Det finns 8 bokstäver och av dessa finns det en dubbel (E) och en trippel (L). Det betyder att det totala antalet möjliga ord är

$$\frac{8!}{2!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 6} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 56 \cdot 60 = 3360.$$

För JONASSON blir det istället tre dubbla (O, N, S) så

$$\frac{8!}{2!2!2!} = 7! = 5040.$$

Det är enklare att räkna ut antalet som innehåller två E i rad (för LEMURELL, för JONASSON är det lika enkelt oavsett) och subtrahera detta från det totala antalet. Antalet möjliga ord med de övriga sex bokstäverna är $6!/3!$. Man kan sedan placera in E-paret på sju olika ställen. Det ger att antalet utan två E i rad för LEMURELL är

$$3360 - 7 \cdot \frac{6!}{3!} = 3360 - \frac{7!}{3!} = 3360 - 840 = 2520.$$

Totalt blir det alltså $2520 + 5040 = 7560$.

6.16. Vi har möjligheterna att antalet svarta bollar är 0, 2 eller 4. Man kan välja k svarta bollar på $\binom{11}{k}$ sätt och $5 - k$ vita bollar på $\binom{7}{5-k}$ sätt. Totalt blir det alltså

$$\binom{11}{0}\binom{7}{5} + \binom{11}{2}\binom{7}{3} + \binom{11}{4}\binom{7}{1} = 1 \cdot 21 + 55 \cdot 35 + 330 \cdot 7 = 4256.$$

6.17. (a) Välja sex bland tolv kan göras på

$$\binom{12}{6} = 924$$

olika sätt.

(b) Välja tre pojkar bland sju kan göras på

$$\binom{7}{3} = 35$$

olika sätt och välja tre flickor bland fem kan göras på

$$\binom{5}{3} = 10$$

olika sätt. Totalt blir det $35 \cdot 10 = 350$ olika sätt.

(c) Antalet sätt att välja både Pelle och Anna är samma som antalet sätt att välja fyra bland övriga tio personer. Detta kan göras på

$$\binom{10}{4} = 210$$

olika sätt. Dessa ska subtraheras ifrån det totala antalet som är 924 enligt första deluppgiften. Antalet olika sätt är alltså $924 - 210 = 714$.

6.18. Om vi börjar med lucian så kan den väljas på 10 olika sätt. Därefter finns det 9 flickor kvar att välja bland så de 4 tärnorna kan väljas på

$$\binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$$

sätt. Till slut finns det 13 pojkar att välja stjärngossar bland vilket går på

$$\binom{13}{2} = \frac{13 \cdot 12}{2 \cdot 1} = 78$$

sätt. Enligt multiplikationsprincipen blir det totalt

$$10 \cdot 126 \cdot 78 = 98280.$$

6.19. Först väljer vi 4 personer till ett lag. Det går på

$$\binom{12}{4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 55 \cdot 9 = 495$$

sätt. Därefter är det 8 personer att välja på till det andra laget som då kan väljas på

$$\binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 14 \cdot 5 = 70$$

sätt. Nu gäller det att inte missa att vi kan permutera de tre lagen och få samma uppdelning av personer på $3! = 6$ olika sätt. Det totala antalet olika uppdelningar blir därför

$$\binom{12}{4}\binom{8}{4} \cdot \frac{1}{6} = 165 \cdot 35 = 5775.$$

6.20. Vi tar ut de två lagen som ska spela basket först. Då ska vi först välja 4 personer till ett av lagen bland 16 personer och sedan 4 personer till andra laget bland de 12 som är kvar. Detta kan göras på

$$n_1 = \binom{16}{4}\binom{12}{4}$$

sätt. Fast då räknar vi dubbelt för man kan permutera de två lagen utan att ändra valet så det blir $n_1/2$ möjliga val för basketlagen. Därefter är det dags att ta ut de två innebandylagen. Man kan välja ut ett lag på $\binom{8}{4}$ olika sätt och sedan är det andra laget bestämt. Men nu räknar vi återigen dubbelt för att välja 4 personer blir samma som att välja de andra 4 personerna. Totalt får vi alltså

$$\frac{\binom{16}{4}\binom{12}{4}\binom{8}{4}}{4}(= 15'765'750).$$